

Dans cette séance on va voir
un exemple en biologie des matrices d'applications linéaires
et des valeurs/vecteurs propres.

14.11

On va étudier un modèle de "population" simplifié

But: étudier l'évolution d'une population d'organismes du même type
dans le temps,

Hypothèses

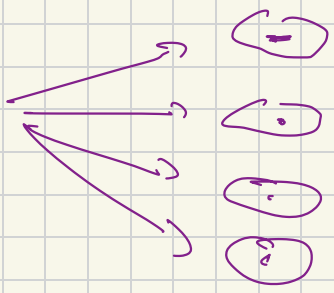
(1) chaque organisme a une durée de vie maximale de $N=3$ jours
↳ on va noter l'âge d'un organisme avec $1 \leq i \leq 3 = N$

(2) Si un organisme
a l'âge i

→ la probabilité de survie
encore un jour est → $p_{i+1 \leftarrow i} \in [0,1]$

→ la quantité d'organismes progéniteurs
(nés au premier jour) par un organisme
d'âge i est $r_i \in \mathbb{N}$

organisme
d'âge i



r_i nouveaux
organismes

$q_i(K) := \# \text{ organismes d'âge } i \text{ en temps } K, K \in \mathbb{N}$
(aussi mesure en jours)

On veut exprimer

$q_i(K+1)$ en fonction de $q_1(K), \dots, q_3(K)$
(pour $1 \leq i \leq 3$)

$$(A) \quad q_1(K+1) = r_1 \cdot q_1(K) + r_2 \cdot q_2(K) + r_3 \cdot q_3(K)$$

$$(B) \quad q_2(K+1) = p_{2 \leftarrow 1} \cdot q_1(K)$$

$$(C) \quad q_3(K+1) = p_{3 \leftarrow 2} \cdot q_2(K)$$

(*)

Alors, si l'on pose

$$\bar{q}(k) = \begin{pmatrix} q_1(k) \\ q_2(k) \\ q_3(k) \end{pmatrix}$$

(*) devient

$$\bar{q}(k+1) =$$

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ p_{2 \leftarrow 1} & 0 & 0 \\ 0 & p_{3 \leftarrow 2} & 0 \end{pmatrix} \bar{q}(k)$$

L
matrice
de
Leslie

Problème

On veut calculer $\bar{q}(k)$ pour $k \gg 1$
étant donné $\bar{q}(0)$

Comment faire?

On va faire un exemple guidé:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{q}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On veut calculer $\vec{q}(k)$

Première idée

$$\vec{q}(1) = L \cdot \vec{q}(0)$$

$$\vec{q}(2) = L \cdot \vec{q}(1) = L \cdot (L \cdot \vec{q}(0))$$

$$\vec{q}(3) = L \cdot \vec{q}(2) = L (L (L \vec{q}(0)))$$

$$\Rightarrow \vec{q}(k) = L^k \cdot \vec{q}(0)$$

Slogan

Pour calculer L^k on doit calculer les valeurs et vecteurs propres de L !

① Calcul de valeurs propres : $\rightarrow$ racines de $\det(L - \lambda \cdot I_3)$

$$\det(L - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 7 & 6 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \overset{\text{dev. 1ère ligne}}{=} (-\lambda)(-\lambda)^2 - 7 \cdot (-\lambda) + 6 \cdot 1$$
$$= -\lambda^3 + 7\lambda + 6$$

Critère de Gauss

$\rightarrow$

chercher des diviseurs de 6 !

$\Rightarrow$ Les racines sont $-1, -2$ et 3 .

② Calcul de vecteurs propres : $\rightarrow \text{Ker}(L - \lambda \cdot I_3)$

$$\lambda = -1 \longrightarrow \mathbb{E}_{-1} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\lambda = -2 \longrightarrow \mathbb{E}_{-2} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\lambda = 3 \longrightarrow \mathbb{E}_3 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_3} \right\} \quad (\text{base de vecteurs propres})$$

$$\Rightarrow [\mathbf{T}_L]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Changement

$\Rightarrow$
de
base

$$L = [\mathbf{T}_L]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} =$$

$$= \underbrace{P}_{\mathcal{B}_{\text{can}} \leftarrow \mathcal{B}} \cdot [\mathbf{T}_L]_{\mathcal{B}} \cdot \underbrace{P^{-1}}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_{\text{can}}} = P \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_D \cdot P^{-1}$$

$$L^k = (P \cdot \textcircled{1} \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot \textcircled{1} \cdot P^{-1}) \cdot \dots \cdot (P \cdot \textcircled{1} \cdot P^{-1})$$

$$= P \cdot \textcircled{1}^k \cdot P^{-1}$$

$$= P \cdot \begin{pmatrix} (-2)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \quad \leftarrow P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 9 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\vec{q}(k) = \begin{pmatrix} (-2)^{k+2} & (-1)^{k+2} & 3^{k+2} \\ (-2)^{k+1} & (-1)^{k+1} & 3^{k+1} \\ (-2)^k & (-1)^k & 3^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & -3/5 \\ -1/4 & 1/4 & 3/2 \\ 1/20 & 3/20 & 1/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gauss-Jordan

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & -3/5 \\ -1/4 & 1/4 & 3/2 \\ 1/20 & 3/20 & 1/10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-2)^{k+2} & (-1)^{k+2} & 3^{k+2} \\ (-2)^{k+1} & (-1)^{k+1} & 3^{k+1} \\ (-2)^k & (-1)^k & 3^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 7/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 \cdot (-2)^{k+2} + 7 \cdot (-1)^{k+2} + 3^{k+2} \\ -4 \cdot (-2)^{k+1} + 7 \cdot (-1)^{k+1} + 3^{k+1} \\ -4 \cdot (-2)^k + 7 \cdot (-1)^k + 3^k = 2k \end{pmatrix}$$

Avec l'ordinateur

k	2k
1	1
2	0
3	13
4	6
5	91
6	120
...	...